Μάθημα 10: 21/04/2020

→ Η $f: D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $z_0 \in D$

f $\mathbb{C}$-διαφορίσιμη στο z_0 $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \exists f'(z_0) \in \mathbb{C} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Λήμμα 3.1.1

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} : \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - \lambda(z - z_0)}{z - z_0} = 0$$

και τότε λ είναι μοναδικό και $\lambda = f'(z_0)$.

$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}$: με $\phi(z) = f(z) - f(z_0) - \lambda(z - z_0)$ ισχύει $\displaystyle\lim_{z \to z_0} \frac{\phi(z)}{z - z_0} = 0 \Leftrightarrow \phi(z) = 0$

αφού $z - z_0 \neq 0$ για $z \to z_0$

$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}$: $f(z) = f(z_0) + \lambda(z - z_0) + o(z - z_0)$ για $z \to z_0$.

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} \left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{|g(z)|} = 0 \Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} \frac{|f(z)|}{g(z)} = 0$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Μόνο όταν στα δεξιά $= 0$

Πρόταση 3.1.1

Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $z_0 \in D$, $f, g : D \to \mathbb{C}$ μιγαδικά διαφορ/μες στο z_0. Τότε:

(α) Αν $f : D \to \mathbb{C}$ μιγαδικά διαφορισιμη στο z_0 τότε f συνεχής στο z_0.

[Αν $f : D \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη στο D τότε είναι συνεχής]

(β) Αν $f, g : D \to \mathbb{C}$, $\mathbb{C}$-διαφορισιμες στο z_0, τότε $f+g$, $f g$, αν $g(z_0) \neq 0$, f/g είναι και αυτές $\mathbb{C}$-διαφορισιμες με:

$$(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0).$$

$$(f g)'(z_0) = f'(z_0) g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0)$$

$$(f/g)(z_0) = \frac{f'(z_0) \cdot g(z_0) - f(z_0) g'(z_0)}{g^2(z_0)}.$$

[Τα παραπάνω ισχύουν και όταν $f, g : D \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφες στο D]

(γ) $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$.

SOS

Παράδειγμα 3.1.1 (από τις σημειώσεις του)
[διαβάζω όλα από το (α) μέχρι το (η)]

(γ) $\boxed{f(z) = z^n} \Rightarrow f'(z) = n z^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$
και $\forall z \in \mathbb{C}$

Απόδειξη

• Για $z_0 = 0$: $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{z^n}{z} =$

$= \lim\limits_{z \to} z^{n-1} = 0$

• Για $z_0 \neq 0$: $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{z^n - z_0^n}{z - z_0} \cancel{= \lim\limits_{z \to z_0} \frac{(z-z_0)}{(z-z_0)}} =$

$= \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{\cancel{(z - z_0)} \cdot \sum\limits_{k=0}^{n-1} z^k \cdot z_0^{n-1-k}}{\cancel{(z - z_0)}}$

$= n \cdot z_0^{n-1}$

SOS

(στ) ΠΡΟΣΟΧΗ !!! $\boxed{f(z) = \overline{z}}$

!!! ΣΧΟΛΙΟ : ΠΟΛΥ ΚΑΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ για ΟΛΟΜΟΡΦΙΑ
ΑΛΛΑ ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΕΧΗΣ

$$\left[|f(z) - f(z_0)| = |\overline{z} - \overline{z_0}| = |\overline{z - z_0}| = |z - z_0| \xrightarrow[z \to z_0]{} 0 \right]$$

Όμως:

$\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} =$

$= \lim\limits_{w \to 0} \dfrac{\overline{w}}{w}$: $\nexists$ ← ΩΣ ΑΣΚΗΣΗ να αποδείξουμε γιατί δεν υπάρχει το όριο (το έχουμε κάνει σε προηγούμενο μάθημα)

[Υπόδειξη: $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall\ |z-z_0|<\delta: \left|\frac{\bar z-\bar z_0}{z-z_0}\right|<\varepsilon$

$$\underset{w=z-z_0}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall\ |w|<\delta: \left|\frac{\bar w}{w}\right|<\varepsilon$$

Από την άλλη $f(z)=\bar z \Leftrightarrow f(x+iy)=x-iy$

$$\Leftrightarrow f(x+iy)=\underbrace{u(x,y)}_{=x}+i\underbrace{v(x,y)}_{=-y}$$

αντιστοιχεί στη μιγαδική συνάρτηση $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ με το διανυσματικό πεδίο $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}(x,y)=\begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$ γραμμική συνάρτηση με

$$D\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}(x,y)=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$ και μάλιστα

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\in C^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2) \Leftrightarrow u,v\in C^\infty(\mathbb{R}^2).$$

<u>Άρα</u>: Η f <u>δεν</u> είναι <u>πουθενά</u>, ούτε μία φορά, $\mathbb{C}$-διαφορίσιμη, ενώ το αντίστοιχο διανυσματικό πεδίο $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ είναι άπειρες φορές συνεχώς διαφ/μη.

Άλλο παράδειγμα για την ιδιαιτερότητα της μιγαδικής διαφορισιμότητας

(1) $\boxed{f(z) = |z|^2}$, $z \in \mathbb{C}$: <u>ΔΕΝ</u> είναι διαφ/μη

σε κανένα $z_0 \in \mathbb{C}^*$ <u>αλλά</u> είναι στο $z_0 = 0$

Αντίστοιχο διανυσματικό πεδίο :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\Big[\ f(x+iy) = |x+iy|^2 = x^2+y^2 = x^2+y^2 + i \cdot 0$$

$$= u(x,y) + i \cdot v(x,y)$$

με $D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

και μάλιστα $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$

$\Leftrightarrow u, v \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$

$f(z) = |z|^2 = z \cdot \bar{z}$ [πάλι έχει $\bar{z}$ μέσα]

<u>Γιατί τόσο πρόβλημα με το συζυγές $\bar{z}$ του z ???</u>

$\rightarrow \lim_{w \to 0} \frac{\bar{w}}{w} \nexists \rightarrow$ Το πρόβλημα προκύπτει

από τη διαίρεση «$\underbrace{\frac{(x,-y)}{(x,y)}}_{= (x,-y) \cdot (x,y)^{-1}}$» [Εννοούμε $\frac{x-iy}{x+iy}$]

, με μιγαδικός πολ/σμός

$(x,y)^{-1}$ αντίστροφο του (x,y) ως προς τον μιγαδικό πολλαπλασιασμό

$$\left[(x_1, y_1)\cdot(x_2, y_2) = x_1x_2 - y_1y_2,\ x_1y_2 + y_1x_2 \right]$$

$$\frac{\bar{w}}{w} = \begin{cases} 1, & \text{αν } \operatorname{Im} w = 0 \\ -1, & \text{αν } \operatorname{Re} = 0 \end{cases}$$

- Επομένως υπάρχει μια ακολουθία που συγκλίνει στο 1 και μια που συγκλίνει στο -1 άρα το όριο $\nexists$

[ΠΡΟΣΟΧΗ!!! Η έννοια του ορίου είναι η ίδια και στο $\mathbb{R}^2$ και στο $\mathbb{C}$]

ΕΡΩΤΗΣΗ : Τι παίζει με τις συναρτήσεις $\boxed{f(z) = \lambda z,}$ $z \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C}$: σταθερό ???

Απάντηση

- Αυτές οι συναρτήσεις με αυτόν τον τύπο είναι όλες οι $\mathbb{C}$- γραμμικές

- Εξετάζουμε την διαφορισιμότητα αυτών των συναρτήσεων (την $\mathbb{C}$-διαφ. και $\mathbb{R}$-διαφ)

$\mathbb{C}$-διαφ/τα : $$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{\lambda z - \lambda z_0}{z - z_0} = \lambda, \forall z_0 \in \mathbb{C}$$

- Επομένως η $f' : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι σταθερή με $f'(z) = \lambda$, $\forall z \in \mathbb{C}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$: σταθερό.

<u>R- διαφίτα</u> [:= η διαφίτα του αντίστοιχου διανυσματικού πεδίου]

Έστω $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in R)$

$$Z = x + iy \quad (x, y \in R)$$

$$\Rightarrow \lambda Z = (\lambda_1 + i\lambda_2)\cdot(x+iy)$$
$$= \underbrace{(\lambda_1 x - \lambda_2 y)}_{=u(x,y)} + i\underbrace{(\lambda_1 y + \lambda_2 x)}_{=v(x,y)}$$
$$= f(x+iy)$$

$\Rightarrow$ Το αντίστοιχο της $f(z) = \lambda z$ διανυσματικό πεδίο είναι $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} \lambda_1 x - \lambda_2 y \\ \lambda_2 x + \lambda_1 y \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

το οποίο είναι $C^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$ και είναι ένα <u>$(\mathbb{R}-)$ γραμμικό διαν/κό πεδίο στον R^2</u>, με*

[όλα τα $\mathbb{R}$- γραμμικά διανυσματικά πεδία στον $\mathbb{R}^2$ είναι της μορφής :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}]$$

* με $D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix}$, το οποίο D ονομάζεται $\mathbb{R}$- παράγωγος του διαν/κού πεδίου.

Άρα η $\mathbb{C}$ παράγωγος κάθε $\mathbb{C}$ γραμμικής

$f(z)=\lambda z$ είναι $f'(z)=\lambda$.

Και αντιστοιχεί στην $(\mathbb{R})$-παράγωγο του αντίστοιχου διανυσματικού πεδίου που είναι $\mathbb{R}$-γραμμικό $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y)=\begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

με $D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y)=\begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ • Κάθε $\mathbb{C}$-γραμμική μιγαδική συνάρτηση αντιστοιχεί σε ένα $\mathbb{R}$-γραμμικό διανυσματικό πεδίο του $\mathbb{R}^2$.

• Είναι $\mathbb{C}$-διαφ/μη και το αντίστοιχο διαν. πεδίο είναι $\mathbb{R}$-διαφ/μο, με $\mathbb{C}$ παράγωγο λ που αντιστοιχεί στην $(\mathbb{R})$-παράγωγο του διανυσματικού πεδίου.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix}=|\lambda|\begin{pmatrix} \frac{\lambda_1}{|\lambda|} & \frac{-\lambda_2}{|\lambda|} \\ \frac{\lambda_2}{|\lambda|} & \frac{\lambda_1}{|\lambda|} \end{pmatrix}$$

$$=|\lambda|\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \lambda=|\lambda|e^{i\theta}, \ \theta\in\mathbb{R}$$

Cauchy - Riemann :

f μιγαδική συνάρτηση $\rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ διανυσματικό πεδίο

SOS $\rightarrow$ f : $\mathbb{C}$- διαφ/μη $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ($\mathbb{R}$)-διαφ/μη με

$$D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

Άρα f : $\mathbb{C}$- διαφορίσιμη $\Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ($\mathbb{R}$-) διαφ/μη

($\not\Leftarrow$ δεν ισχύει πχ η $f(z) = |z|^2$

με $D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ αλλά δεν

είναι μιγαδικά διαφορίσιμη) (βλέπε παραδείγματα)

→ $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, • $\boxed{\mathbb{C}\text{- γραμμική}} \Leftrightarrow f(z) = \lambda z$, $z \in \mathbb{C}$

σταθ. : $\lambda \in \mathbb{C}$

$\boxed{\mathbb{R}\text{ γραμμική}} \Leftrightarrow f(z) = \lambda z + \mu \bar{z}$, όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ σταθερά

και $z \in \mathbb{C}$

• $\mathbb{R}$ γραμμικό διανυσματικό πεδίο :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$ το οποίο

αντιστοιχεί σε $\mathbb{R}$-γραμμική $f(z) = \lambda z + \mu \cdot \bar{z}$

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u>: Από όλες τις $\mathbb{R}$-γραμμικές f είναι $\mathbb{C}$-διαφορίσιμες <u>μόνο</u> οι $\mathbb{C}$-γραμμικές $[\Leftrightarrow \mu = 0]$

[ενώ $D\binom{u}{v}(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ $\exists$ υπάρχει για όλες τις $\mathbb{R}$-γραμμικές]

<u>Σημείωση</u>: Επόμενο μάθημα: Τετάρτη στις 18-20

(Αναπλήρωση της Πέμπτης, 20.02.2020, 9-11)